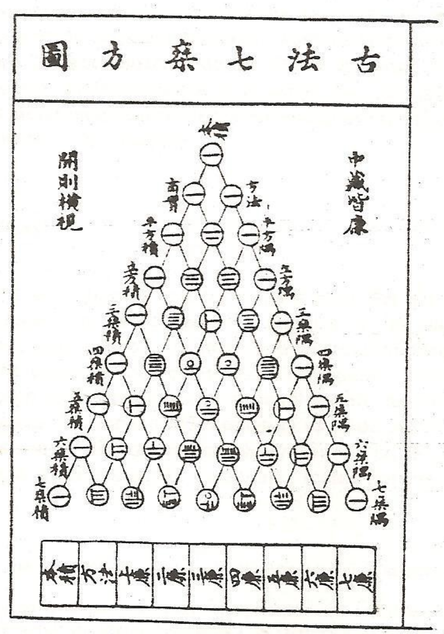
CURIOSIDADES MATEMATICAS
EL TRIANGULO DE PASCAL GENERALIZADO

JOSÉ FRANCISCO LEGUIZAMÓN ROMERO[1]
GRUPO DE INVESTIGACIÓN PIRÁMIDE
LÍNEA MEDIOS EDUCATIVOS EN MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

1. REFERENTE HISTÓRICO

Según Jean Paul Collette en su libro Historia de las matemáticas, plantea que el mal llamado Triángulo de Pascal, realmente se le atribuye al matemático chino Zhou Jijie (hacia 1280-1303), cuya obra principal fue el texto “Espejos preciosos de los cuatro elementos” dedicado a las ecuaciones simultáneas y a las ecuaciones elevadas a potencias tan altas como la decimocuarta. En la mencionada obra, Zhou Jijie en sus primeras páginas plantea un triángulo aritmético (figura 1) donde se encuentran los coeficientes del binomio hasta la octava potencia.



El «triángulo de Pascal» en una obra china de Zhou Jijie (1303).

FIGURA 1

1.Profesor Asociado, UPTC. Licenciado en Matemáticas. Especialista en Matemática Avanzada. Magister en Educación.

2. EL POLINOMIAL: Dados los números enteros $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ mayores o iguales a cero, tales que $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$, se define el polinomial como:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{a_n!}{(a_n - a_{n-1})!(a_{n-1} - a_{n-2})! \cdots (a_4 - a_3)!(a_3 - a_2)!(a_2 - a_1)!a_1!}$$

Ejemplo 1: Determinar el valor del trinomial $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4!}{(4-3)!(3-1)!(1)!} = \frac{4!}{(1)!(2)!(1)!} = 12$$

Ejemplo 2: Determinar el valor del pentanomial $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8!}{(8-6)!(6-4)!(4-3)!(3-2)2!} = \frac{8!}{(2)!(2)!(1)!(1)!(2)!} = \frac{40.320}{8} = 5040$$

El concepto de polinomial surge de una aplicación sucesiva de binomiales. Tomando como base el ejemplo 1 se tiene:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4!}{(4-3)!\cancel{3}!} x \frac{\cancel{3}!}{(3-1)!1!} = \frac{4!}{(4-3)!(2)!(1)!} = 12$$

3. PRESENTACIÓN DEL TRIANGULO DE PASCAL GENERALIZADO

3.1 TRIANGULO CON COEFICIENTES PARA EL BINOMIO

El triángulo de Pascal usual (hasta séptimo nivel) se presenta con binomiales, de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}
\end{array}
$$

FIGURA 2

En formato numérico:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

FIGURA 3

3.2 TRIANGULO CON COEFICIENTES PARA TRINOMIOS

Se presenta el triángulo hasta quinto nivel:

1

1 1 1

1 2 2 1 2 1

1 3 3 3 6 3 1 3 3 1

1 4 4 6 12 6 4 12 12 4 1 4 6 4 1

1 5 5 10 20 10 10 30 30 10 5 20 30 20 5 1 5 10 10 5 1

FIGURA 4

Utilizando los trinomiales:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$$

FIGURA 5

3.3 TRIANGULO CON COEFICIENTES PARA TETRANOMIOS

El triángulo hasta quinto nivel, se presenta así:

1

1 1 1 1

1 2 2 2 1 2 2 1 2 1

1 3 3 3 3 6 6 3 6 3 1 3 3 3 6 3 1 3 3 1

1 4 4 4 6 12 12 6 12 6 4 12 12 12 24 12 4 12 12 4 1 4 4 6
12 6 4 12 12 4 1 4 6 4 1

1 5 5 5 10 20 20 10 20 10 10 30 30 30 60 30 10 30 30 10 5 20 20 30
60 30 20 60 60 20 5 20 30 20 5 1 5 5 10 20 10 10 30 30 10 5 20 30
20 5 1 5 10 10 5 1

FIGURA 6

Utilizando los tetranomiales, se tiene

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\4\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix}$$

FIGURA 7

3.4 TRIANGULO CON COEFICIENTES PARA POLINOMIOS DE n TÉRMINOS ($n \geq 6$)

El triángulo generalizado es:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\\vdots\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\\vdots\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\\vdots\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\2\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\\vdots\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\\vdots\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\\vdots\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\\vdots\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix}n\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\1\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\1\\1\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}n\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\1\\1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\2\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\2\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\2\\1\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}n\\2\\1\\1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\2\\1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\2\\2\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\2\\2\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}n\\2\\2\\1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\2\\2\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\2\\2\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}n\\n\\n\\n\\\vdots\\n\\n-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\n\\n\\n\\\vdots\\n\\n-2\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}n\\n\\n\\n\\\vdots\\n\\n-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\n\\n\\n\\\vdots\\n\\n\end{pmatrix}$$

FIGURA 8

4 CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE PASCAL GENERALIZADO, SIN UTILIZACIÓN DE POLINOMIALES.

4.1. CONSTRUCCIÓN DEL TRIANGULO CON COEFICIENTES PARA BINOMIOS

Es una construcción muy conocida, presentada en los textos de algebra elemental y en los de grado octavo de Educación Básica.

Se tiene en cuenta que cada nivel inicia con 1 y termina con 1. El nivel siguiente se obtiene sumando los términos respectivos del nivel anterior, así:

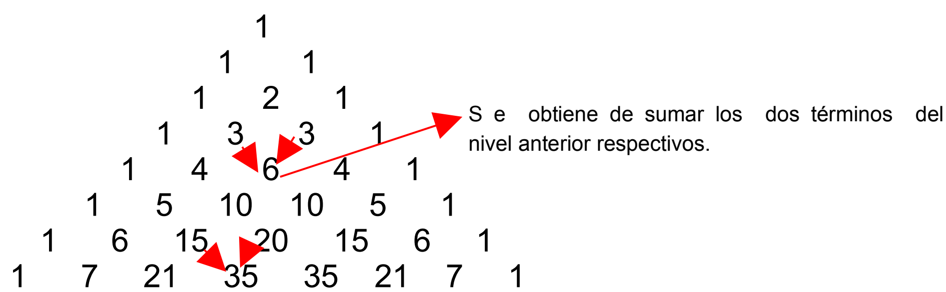


FIGURA 9

Se destaca que este triángulo deja leer el número de términos que deben tener él y los demás triángulos en cada nivel.

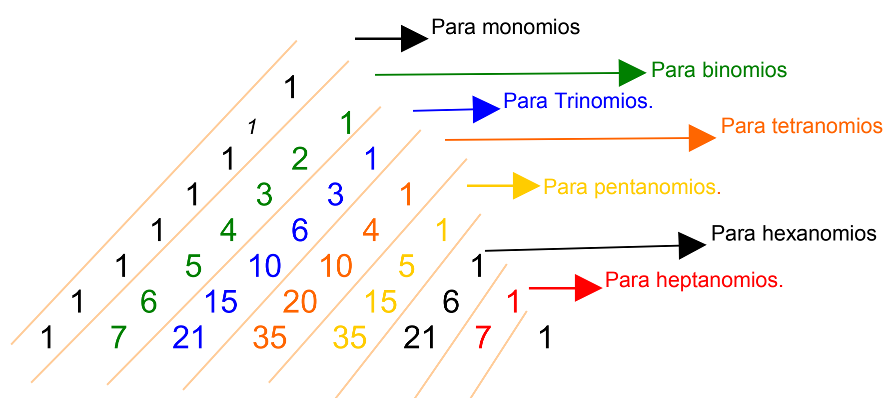


FIGURA 10

Para este triángulo, en la figura 9 obsérvese la segunda diagonal (verde), se tiene la sucesión: 1 2 3 4 5 6 7…, quiere decir que en el primer nivel tiene 1 término, en el segundo nivel 2 términos, en el tercer nivel 3, en el cuarto 4, en el quinto 5 y así sucesivamente, como se puede corroborar en la misma figura.

Para el triángulo orientado a trinomios, figura 9 tercera diagonal (azul), se observa la sucesión: 1 3 6 10 15 21…, se tiene pues que el primer nivel tiene 1 término, el segundo nivel tiene 3 términos, el tercer nivel 6, el cuarto nivel 10, en el quinto 15 y se sigue con el mismo proceso. Se puede comparar mirando el triángulo para trinomios (figura 4).

Para el triángulo construido para hexanomios, sexta diagonal (negro), se presenta la sucesión 1 6 21…, es decir, en el primer nivel tiene 1 término, en el segundo nivel 6 términos, en el tercer nivel 21 y se sigue.

4.2 CONSTRUCCIÓN DEL TRIANGULO CON COEFICIENTES PARA TRINOMIOS

Para la construcción de los demás triángulos, se tiene en cuenta el triángulo de orden anterior y se separa por grupos de la siguiente manera:

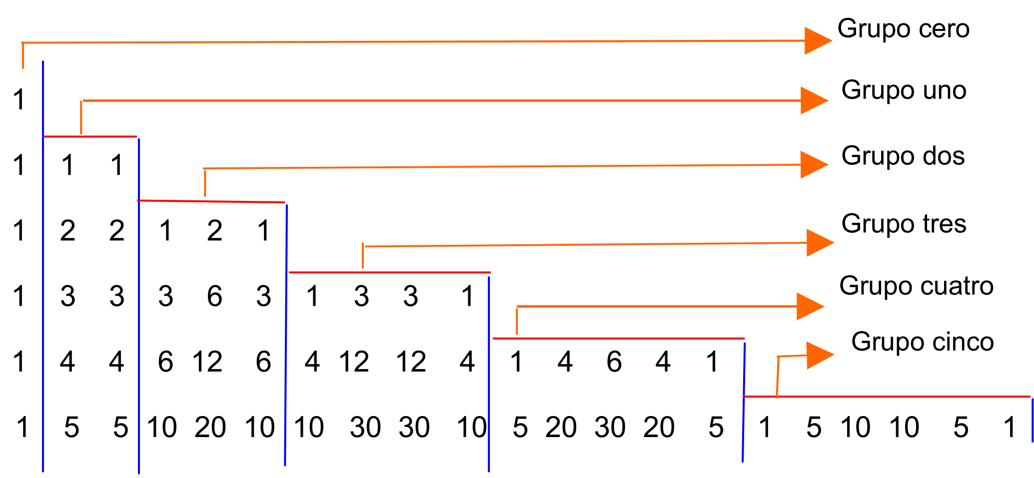


FIGURA 11

<u>Grupo cero</u>: Siempre es de una cifra y es 1

<u>Grupo uno</u>: Su primera fila, es la fila **dos** del triángulo usual (figura 10), es decir 1 1. Teniendo en cuenta el triángulo de pascal, en su diagonal para **binomios** donde aparece la sucesión 1 2 3 4 5 6 7… y tomando como pivote la fila 1, se multiplica esta primera fila por el número respectivo en la sucesión para obtener las demás filas, es decir, la fila uno del grupo se multiplica por 1 y queda el mismo valor (1 1), para la segunda fila se multiplica por 2, quedando (2 2), para la tercera por 3 obteniéndose (3 3) y así sucesivamente se obtienen las filas que sean necesaria en este grupo.

<u>Grupo dos</u>: Su primera fila, es la fila **tres** del triángulo usual (figura 10), es decir 1 2 1. Teniendo en cuenta el triángulo de pascal, en su diagonal para **trinomios** donde aparece la sucesión 1 3 6 10 15 21…, y tomando como pivote la fila 1, se multiplica esta primera fila por el número respectivo en la sucesión para obtener las demás filas, es decir, la fila uno del grupo se multiplica por 1 y queda el mismo valor (1 2 1), para la segunda fila se multiplica por 3, quedando (3 6 3), para la tercera por 6 obteniéndose (6 12 6), para la cuarta por 10 resultando (10 20 10) y así sucesivamente se obtienen las filas que sean necesaria en este grupo.

Grupo tres: Su primera fila, es la fila **cuatro** del triángulo usual, es decir 1 3 3 1. Teniendo en cuenta el triángulo de pascal (figura 10), en su diagonal para **tetranomios** donde aparece la sucesión 1 4 10 20 35 56…, y tomando como pivote la fila 1, se multiplica esta primera fila por el número respectivo en la sucesión para obtener las demás filas, es decir, la fila uno del grupo se multiplica por 1 y queda el mismo valor (1 3 3 1), para la segunda fila se multiplica por 4, quedando (4 12 12 4), para la tercera por 10 obteniéndose (10 30 30 10), para la cuarta por 20 resultando (20 60 60 20) y así sucesivamente se obtienen las filas que sean necesaria en este grupo.

Grupo cuatro: Su primera fila, es la fila **cinco** del triángulo usual, es decir 1 4 6 4 1. Teniendo en cuenta el triángulo de pascal (figura 10), en su diagonal para **pentanomios** donde aparece la sucesión 1 5 15 35 70…, y tomando como pivote la fila 1, se multiplica esta primera fila por el número respectivo en la sucesión para obtener las demás filas, es decir, la fila uno del grupo se multiplica por 1 y queda el mismo valor (1 4 6 4 1), para la segunda fila se multiplica por 5, quedando (5 20 30 20 5), para la tercera por 15 obteniéndose (15 60 90 60 15), para la cuarta por 35 resultando (35 140 210 140 35) y así sucesivamente se obtienen las filas que sean necesaria en este grupo.

Grupo cinco: Su primera fila, es la fila **seis** del triángulo usual (figura 10), es decir 1 5 10 10 5 1. Teniendo en cuenta el triángulo de pascal, en su diagonal para **hexanomios** donde aparece la sucesión 1 6 21 56…, y tomando como pivote la fila 1, se multiplica esta primera fila por el número respectivo en la sucesión para obtener las demás filas, es decir, la fila uno del grupo se multiplica por 1 y queda el mismo valor (1 5 10 10 5 1), para la segunda fila se multiplica por 6, quedando (6 30 60 60 30 6), para la tercera por 21 obteniéndose (21 105 210 210 105 21), para la cuarta por 56 resultando (56 280 560 560 280 56) y así sucesivamente se obtienen las filas que sean necesaria en este grupo.

Si es necesario adicionar más grupos, se procede de idéntica forma al igual que para hallar sus filas respectivas.

4.3 CONSTRUCCIÓN DEL TRIANGULO CON COEFICIENTES PARA TETRANOMIOS

Para la construcción de los demás triángulos, se tiene en cuenta un proceso similar, es decir, para obtener cada primera fila de grupo se tiene en cuenta el triángulo anterior (en este caso el triángulo para trinomios, figura 4), para obtener las filas de cada grupo se tiene en cuenta el triángulo de Pascal usual (figura 10):

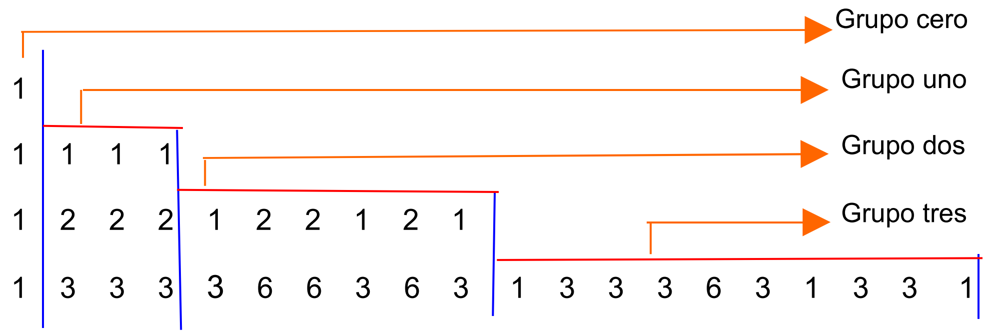


FIGURA 12

Grupo cero: Siempre es de una cifra y es 1

Grupo uno: Su primera fila, es la fila **dos** del triángulo para trinomios (figura 4), es decir 1 1 1. Teniendo en cuenta el triángulo de pascal usual (figura 10), en su diagonal para **binomios** donde aparece la sucesión 1 2 3 4 5 6 7… y tomando como pivote la fila 1, se multiplica esta primera fila por el número respectivo en la sucesión para obtener las demás filas, es decir, la fila uno del grupo se multiplica por 1 y queda el mismo valor (1 1 1), para la segunda fila se multiplica por 2, quedando (2 2 2), para la tercera por 3 obteniéndose (3 3 3) y así sucesivamente se obtienen las filas que sean necesaria en este grupo.

Grupo dos: Su primera fila, es la fila **tres** del triángulo para trinomios, es decir 1 2 2 1 2 1. Teniendo en cuenta el triángulo de pascal usual, en su diagonal para **trinomios** donde aparece la sucesión 1 3 6 10 15 21…, y tomando como pivote la fila 1, se multiplica esta primera fila por el número respectivo en la sucesión para obtener las demás filas, es decir, la fila uno del grupo se multiplica por 1 y queda el mismo valor (1 2 2 1 2 1), para la segunda fila se multiplica por 3, quedando (3 6 6 3 6 3), para la tercera por 6 obteniéndose (6 12 12 6 12 6), para la cuarta por 10 resultando (10 20 20 10 20 10) y así sucesivamente se obtienen las filas que sean necesaria en este grupo.

Grupo tres: Su primera fila, es la fila **cuatro** del triángulo para trinomios, es decir 1 3 3 3 6 3 1 3 3 1. Teniendo en cuenta el triángulo de pascal, en su diagonal para **tetranomios** donde aparece la sucesión 1 4 10 20 35 56…, y tomando como pivote la fila 1, se multiplica esta primera fila por el número respectivo en la sucesión para obtener las demás filas, es decir, la fila uno del grupo se multiplica por 1 y queda el mismo valor (1 3 3 3 6 3 1 3 3 1), para la segunda fila se multiplica por 4, quedando (4 12 12 12 24 12 4 12 12 4), para la tercera por 10 obteniéndose (10 30 30 30 60 30 10 30 30 10), para la cuarta por 20 resultando (20 60 60 60 120 60 20 60 60 20) y así sucesivamente se obtienen las filas que sean necesaria en este grupo.

Grupo cuatro: Su primera fila, es la fila **cinco** del triángulo para trinomios, es decir 1 4 4 6 12 6 4 12 12 4 1 4 6 4 1. Teniendo en cuenta el triángulo de pascal, en su diagonal para **pentanomios** donde aparece la sucesión 1 5 15

35 70…, y tomando como pivote la fila 1, se multiplica esta primera fila por el número respectivo en la sucesión para obtener las demás filas, es decir, la fila uno del grupo se multiplica por 1 y queda el mismo valor (1 4 4 6 12 6 4 12 12 4 1 4 6 4 1), para la segunda fila se multiplica por 5, quedando (5 20 20 30 60 30 20 60 60 20 5 20 30 20 5), para la tercera por 15 obteniéndose (15 60 60 90 180 90 60 180 180 60 15 60 90 60 15), para la cuarta por 35 resultando (35 140 140 240 420 210 140 420 420 140 35 140 210 140 35) y así sucesivamente se obtienen las filas que sean necesaria en este grupo.

Si es necesario adicionar más grupos, se procede de idéntica forma al igual que para hallar sus filas respectivas.

Además, los triángulos para polinomios en general se construyen de forma similar.

5 APLICACIÓN DEL TRIÁNGULO DE PASCAL GENERALIZADO AL DESARROLLAR POTENCIAS ENTERAS POSITIVAS DE POLINOMIOS

5.1 DESARROLLO DE POTENCIAS DE BINOMIOS

Es la aplicación típica del triángulo de Pascal, en donde intervienen dos términos, el primero inicia con la máxima potencia y el segundo con la mínima, uno va disminuyendo la potencia y el otro la va aumentando.

Ejemplo: desarrollar $(a+b)^7$

Solución: Mirando el triángulo de Pascal para binomios (figura 8 o 9), en el grado 7 se tiene la sucesión 1 7 21 35 35 21 7 1 y para el desarrollo se tiene:

$$(a+b)^7 = a^7b^0 + 7a^6b^1 + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7a^1b^6 + a^0b^7$$

Dado que los términos $a^0 = 1,$ y $b^0 = 1,$ la respuesta se da normalmente de la forma:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b^1 + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7a^1b^6 + b^7$$

Obsérvese que el término a inició con su máximo exponente 7 y sucesivamente fue disminuyendo una unidad, mientras que el otro término b, inició con el exponente cero y fue incrementando una unidad en cada paso, tener en cuenta que la suma de los exponentes de los términos siempre es la potencia que estamos determinando, en este caso 7.

Ejemplo: Desarrollar $(x+2y)^4$

Solución: Del triángulo de pascal usual, se determina que los coeficientes de la cuarta potencia son: 1 4 6 4 1, se tiene que:

$$(x+2y^2)^4 = x^4 + 4x^3(2y^2) + 6x^2(2y^2)^2 + 4x(2y^2)^3 + (2y^2)^4$$

Por lo tanto el resultado es:

$$(x+2y^2)^4 = x^4 + 8x^3y^2 + 24x^2y^4 + 32xy^6 + 16y^8$$

5.2 DESARROLLO DE POTENCIAS DE TRINOMIOS

Se desarrolla de una manera similar que los binomios teniendo en cuenta dos detalles, en primer lugar hay que utilizar el triángulo para trinomios y en segundo lugar hay que ordenar las términos a utilizar, es decir aparece inicialmente el primer término, luego el segundo y finalmente el tercero. Obsérvese el proceso en el ejemplo siguiente:

Ejemplo: Expandir $(a+b+c)^3$

Solución: Se va a asumir el orden, primero el término a, segundo b y tercero el término c. Observando el triángulo para trinomios (figura 4) en el grado tres, se tiene la siguiente sucesión: 1 3 3 3 6 3 1 3 3 1, así el desarrollo es:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3,$$

Observe que aparece a elevada a la máxima potencia, luego disminuye una unidad en el exponente y aparece b, luego con el mismo exponente aparece c. Luego a disminuye nuevamente una unidad y se combina priorizando b sobre c, cuando desaparece a, se hace la combinación usual entre b y c.

Ejemplo: Expandir $(a+b+c)^5$

Solución: Observando el triángulo para trinomios(figura 4) en el grado quinto, se encuentra la sucesión: 1 5 5 10 20 10 10 30 30 10 5 20 30 20 5 1 5 10 10 5 1, por lo tanto la expansión será:

$$(a+b+c)^5 = a^5 + 5a^4b + 5a^4c + 10a^3b^2 + 20a^3bc + 10a^3c^2 + 10a^2b^3 + 30a^2b^2c$$
$$+30a^2bc^2 + 10a^2c^3 + 5ab^4 + 20ab^3c + 30ab^2c^2 + 20abc^3 + 5ac^4 + b^5 + 5b^4c$$
$$+10b^3c^2 + 10b^2c^3 + 5bc^4 + c^5$$

5.3 DESARROLLO DE POTENCIAS PARA POLINOMIOS

Se utiliza el mismo proceso que en el anterior, teniendo siempre en cuenta el orden de las variables y el triángulo respectivo.

Ejemplo: Expandir $(a+b+c+d)^4$

Solución: Observando el triángulo para tetranomios en la cuarta potencia se tiene la sucesión 1 4 4 4 6 12 12 6 12 6 4 12 12 12 24 12 4 12 12 4 1 4 4 6 12 6 4 12 12 4 1 4 6 4 1, luego la expansión será:

$$(a+b+c+d)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^3d + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 12a^2bd + 6a^2c^2$$
$$+12a^2cd + 6a^2d^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12ab^2d + 12abc^2 + 24abcd + 12abd^2 + 4ac^3$$
$$+12ac^2d + 4acd^2 + b^4 + 4b^3c + 4b^3d + 6b^2c^2 + 12b^2cd + 6b^2d^2 + 4bc^3 + 12bc^2d$$
$$+12bcd^2 + 4bd^3 + c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$$

De manera similar se trabaja cualquier polinomio, elevado a una potencia entera positiva.

BIBLIOGRAFIA:

APOSTOL, Tom M. Calculus Volumen I. Ed. Reverte S. A. ed. Segunda, Barcelona, 1978.

COLLETTE, Jean Paul. Historia de las Matemáticas. Ed. siglo veintiuno editores, ed Segunda, México, 1986.

STANLEY, A. Smith et alter. Algebra, Trigonometría y Geometría Analítica. Ed. Pearson Educación, ed. Primera, México, 1998.